© *В.С. Швыдкий, Т.О. Девятых, 2012 г.*
ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
г. Екатеринбург

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ВАННЕ ПЛАВИЛЬНОЙ ПЕЧИ

При разработке численной схемы плавильной печи целесообразно тщательно учесть особенности расплава. Первой такой особенностью является его большая плотность. Учитывая также большую вязкость и медленное движение (практически ползущее), можно уверенно считать расплав несжимаемой жидкостью. Конечно, его плотность зависит от температуры, а температура в ванне изменяется, но, во-первых, эта зависимость слабая и, во-вторых, температура расплава в ванне изменяется от 1000 ^{o}С до 1580 ^{o}С (максимум), что приводит к относительно малым изменениям плотности. Иными словами, с достаточной точностью можно считать для расплава div $\mathbf{v} = 0$ и записать уравнения движения в виде:

- в проекции на ось x

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]; \qquad (1)$$

- в проекции на ось y

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})\right]+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]; \qquad (2)$$

- в проекции на ось z

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\rho g; \qquad (3)$$

Вязкость расплава существенно зависит от температуры. Однако уравнения (1)–(3) – это уравнения баланса импульса для бесконечно малого объёма. При составлении этого баланса можно считать, что температура расплава, а следовательно, и его вязкость, в пределах элементарного объема одинакова. Тогда μ можно вынести из-под знака производных, что приводит к упрощению уравнений.

В самом деле, например в уравнении (1) можно при этом выделить слагаемые

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

и аналогично для уравнений (2) и (3). Заметим, что такой подход не исключает учёта зависимости μ от температуры, поэтому окончательный вид уравнений движения можно представить следующим образом (для оси x)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Для других осей уравнение записывается аналогично.

Уравнение неразрывности также можно упростить. Хотя формально мы должны учитывать наличие внутренних источников (стоков) массы, фактически мы этого сделать не можем из-за неопределенности кинетики физико-химических превращений и отсутствия математического описания этой кинетики. Поэтому будем использовать уравнение неразрывности в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0.$$

Здесь мы несколько противоречим сделанному выше утверждению о несжимаемости расплава, однако, во-первых, введение плотности под знаки производных не слишком усложняет уравнение, а, во-вторых, мы готовим почву для дальнейшего учета теплообмена.

Построение дискретного аналога всегда нужно выполнять для безразмерных уравнений, поскольку в этом случае легче оценить порядок аппроксимации и устойчивость численной схемы. Поэтому введем соответствующие безразмерные параметры.

Будем отсчитывать компоненты скорости в долях *среднерасходной* скорости расплава в протоке $V_0 = P/(86{,}4\cdot\rho_0\cdot z_2\cdot b_2)$ м/с, где ρ_0 – масштабное значение плотности, P – производительность печи, z_2 – высота протока, b_2 – ширина протока. Индекс «0» у теплофизических параметров характеризует значение при масштабной температуре T_0. В качестве характерной длины примем длину L:

$$U=\frac{u}{V_0},\ V=\frac{v}{V_0},\ W=\frac{w}{V_0},\ X=\frac{x}{L},\ Y=\frac{y}{L},\ Z=\frac{z}{L},\ H=\frac{h}{L},\ B=\frac{b}{L},$$

$$Z_2=\frac{z_2}{L},\ B_2=\frac{b_2}{L},\ X_1=\frac{x_1}{L},\ \tilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0},\ \tilde{\mu}=\frac{\mu}{\mu_0}.$$

Здесь h – глубина слоя расплава в ванне, b – ширина ванны, x_1 – длина загрузочной части ванны. Подстановка этих соотношений в консервативную форму записи уравнения в проекции на ось x (для других осей аналогично) приводит к выражению:

$$\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial X}\left(\tilde{\rho}U^2-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\tilde{\rho}UV-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\tilde{\rho}UW-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial Z}\right)=0,$$

где $P = p/(\rho_0 V_0^2)$ – безразмерное давление или число Эйлера, $Re = \rho_0 V_0 L/\mu_0$ – число Рейнольдса, $Fr = V_0^2/(gL)$ – число Фруда.

Введем обозначения

$$F_1 = \tilde{\rho}U^2-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial X},\ G_1 = \tilde{\rho}UV-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial Y},\ H_1 = \tilde{\rho}UW-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U}{\partial Z},$$

$$F_2 = \tilde{\rho}UV-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial V}{\partial X},\ G_2 = \tilde{\rho}V^2-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial V}{\partial Y}, H_2 = \tilde{\rho}VW-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial V}{\partial Z},$$

$$F_3 = \tilde{\rho}UW-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial W}{\partial X},\quad G_3 = \tilde{\rho}VW-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial W}{\partial Y},\quad H_3 = \tilde{\rho}W^2-\frac{\tilde{\mu}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial W}{\partial Z}.$$

Тогда уравнения движения можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\partial F_1}{\partial X}+\frac{\partial G_1}{\partial Y}+\frac{\partial H_1}{\partial Z}=0;\\
&\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{\partial F_2}{\partial X}+\frac{\partial G_2}{\partial Y}+\frac{\partial H_2}{\partial Z}=0;\\
&\frac{\partial P}{\partial Z}+\frac{\partial F_3}{\partial X}+\frac{\partial G_3}{\partial Y}+\frac{\partial H_3}{\partial Z}+\frac{\tilde{\rho}}{\mathrm{Fr}}=0.
\end{aligned}\right\}$$

Решение данной системы уравнений предполагается выполнять с использованием конечно-разностных методов.